ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 144 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-361-370

УДК 517.988.5

Конусное обобщение теоремы Банаха и накрывание вдоль кривых

Арам Владимирович АРУТЮНОВ, Сергей Евгеньевич ЖУКОВСКИЙ

ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН»

117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию свойства накрывания линейных и нелинейных отображений банаховых пространств. Рассмотрен линейный непрерывный оператор, действующий из одного банахового пространства в другое. Показано, что для любой точки y_0 из относительной внутренности образа заданного выпуклого замкнутого конуса существует коническая окрестность этой точки, относительно которой заданный оператор обладает свойством накрывания в нуле с константой накрывания, зависящей от точки y_0. Приведен пример, показывающий, что линейный непрерывный оператор может не обладать свойством накрывания относительно образа заданного конуса в нуле, т. е. для сужений линейных непрерывных операторов на замкнутые выпуклые конусы утверждение теоремы Банаха об открытом отображении может не выполняться. Приведено следствие полученной теоремы для случая, когда пространство, в которое действует заданный оператор, конечномерно. Рассмотрены нелинейные дважды дифференцируемые отображения банаховых пространств. Для них приведены условия локального накрывания вдоль некоторой кривой относительно заданного конуса. Соответствующие достаточные условия сформулированы в терминах 2-регулярных направлений. Они остаются содержательными и в случае вырождения первой производной рассматриваемого отображения в заданной точке.

Ключевые слова: теорема Банаха об открытом отображении, выпуклый конус, анормальная точка, 2-регулярность, накрывание вдоль кривой

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20131, https://rscf.ru/project/20-11-20131/).

Для цитирования: *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Конусное обобщение теоремы Банаха и накрывание вдоль кривых // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 144. С. 361–370. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-361-370

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-361-370

Generalization of Banach's theorem for cones and covering along curves

Aram V. ARUTYUNOV, Sergey E. ZHUKOVSKIY
V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

Abstract. This work is devoted to the study of the covering property of linear and nonlinear mappings of Banach spaces. We consider linear continuous operators acting from one Banach space to another. For a given operator, it is shown that for any point y_0 from the relative interior of the image of a given convex closed cone there exists a conical neighborhood of y_0, with respect to which the given operator has the covering property at zero with a covering constant depending on the point y_0. We provide an example showing that for a linear continuous operator the covering property with respect to the image of a given cone at zero may fail, i. e. the statement of Banach's theorem on an open mapping may not hold for restrictions of linear continuous operators to closed convex cones. We obtain a corollary of the obtained theorem for the case when the target space is finite-dimensional. Moreover, nonlinear twice differentiable mappings of Banach spaces are considered. For them, conditions for local covering along a certain curve with respect to a given cone are presented. The corresponding sufficient conditions are formulated in terms of 2-regular directions. They remain meaningful even in the case of degeneracy of the first derivative of the mapping under consideration at a given point.

Keywords: Banach's open mapping theorem, convex cone, abnormal point, 2-regularity, covering along a curve

Acknowledgements: The research was supported by a grant of the Russian Science Foundation (project no. 20-11-20131, https://rscf.ru/en/project/20-11-20131/).

Mathematics Subject Classification: 47J07.

For citation: Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E. Generalization of Banach's theorem for cones and covering along curves. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:144 (2023), 361–370. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-361-370 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть X и Y — это банаховы пространства, $F : X \to Y$ — это гладкое отображение. При исследовании уравнений вида $F(x) = y$ с неизвестным $x \in X$ и параметром $y \in Y$ важную роль играет теорема Банаха об открытом отображении. В настоящей работе мы рассмотрим систему, состоящую из уравнения $F(x) = y$ и включения $x \in K$, где $K \subset X$ — это замкнутый выпуклый конус. Для исследования этой системы мы получим аналог теоремы Банаха об открытом отображении для сужений линейного непрерывного оператора на конус K. Мы приведем достаточные условия разрешимости рассматриваемой системы при значениях параметра y близких к некоторой кривой в терминах 2-регулярных направлений.

1. Основные результаты

Пусть заданы банаховы пространства X и Y, а также выпуклый замкнутый конус K из X. Пусть $A : X \to Y$ — это линейный ограниченный оператор. Через $B_\delta(y)$ обозначим замкнутую δ-окрестность точки $y \in Y$.

Положим $C = A(K)$. Очевидно, что C — это выпуклый конус, правда необязательно замкнутый. Будем предполагать, что подпространство $\mathrm{Lin}C$ — линейная оболочка конуса C, замкнуто и относительная внутренность $\mathrm{ri}C$ непуста. Эти предположения автоматически выполняются, если пространство Y конечномерно.

Спрашивается, верно ли, что существует такая константа $a > 0$, что имеет место

$$\forall\, y \in C \quad \exists\, x \in K : \quad Ax = y, \quad \|x\| \le a\|y\|? \tag{1.1}$$

Иными словами, справедливо ли конусное обобщение теоремы Банаха об открытом отображении?

Если не предполагать замкнутость конуса C, то соответствующий контрпример строится несложно. Поэтому предположим, что конус C замкнут. Если, кроме того, конус C конечнопорожденный, т. е. является выпуклой оболочкой конечного числа лучей, то существование искомого a очевидно. В общем же случае даже в предположении замкнутости и конечномерности C ответ на поставленный вопрос отрицателен, что показывает следующий

П р и м е р 1.1. Пусть $X = l_2$, $K = \{(x^1, x^2, \dots) \in l_2 : x^i \ge 0 \ \forall\, i\}$, т. е. K — это неотрицательный ортант в l_2 и $Y = \mathbb{R}^3$. Выберем в $\mathbb{R}^3$ последовательность векторов d_i следующим образом. Пусть $d_i = (q_i, 1)$, где q_i — двумерный единичный вектор из $\mathbb{R}^2$, составляющий с осью абсцисс угол $2\pi(1 - (i+1)^{-1})$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Тогда $|d_i| = \sqrt{2}$ для всех i и $d_i \to d_0 = (1, 0, 1)$ при $i \to \infty$.

Определим линейный непрерывный оператор A на ортах $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ по формуле $Ae_i = i^{-1} d_i$, т. е. $Ax = \sum\limits_{i=1}^{\infty} i^{-1} x^i d_i$. Через C обозначим выпуклую коническую оболочку векторов d_i, $i = 0, 1, \dots$.

Непосредственно проверяется, что $A(K) = C$, конус C замкнут и в каждый вектор d_i оператором A переводится единственный вектор из K — это вектор ie_i. Следовательно, (1.1) не выполняется.

Отметим, что этот пример можно модифицировать так, что (1.1) нарушается уже при $X = \mathbb{R}^4$.

Сначала докажем утверждение, которое является модификацией леммы из [1, с. 260].

Лемма 1.1. *Пусть B — это замкнутый шар положительного радиуса, лежащий во внутренности* $\mathrm{int}C$ *множества C и $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha B$ — это объединение множеств αB по всем $\alpha \in (0,1]$. Пусть множество D всюду плотно в $\mathcal{B}$.*

Тогда произвольный $y \in \mathrm{int}B$, $y \neq 0$ можно разложить в ряд так, что имеет место

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i, \quad y_i \in D, \quad \|y_i\| \le 3\|y\|2^{-i}. \tag{1.2}$$

Доказательство. Вначале покажем, что для любого $\eta \in \mathrm{int}\mathcal{B}$, $\eta \neq 0$ выполняется

$$\exists \xi \in D: \quad 0 \neq \eta - \xi \in \mathrm{int}\mathcal{B}, \quad \|\eta - \xi\| \le \frac{1}{2}\|\eta\|. \tag{1.3}$$

Действительно, $\eta - 3/4\eta = 1/4\eta \in \mathrm{int}\mathcal{B}$. Поэтому в D найдется такой достаточно близкий к вектору $3/4\eta$ вектор $\xi \in D$, что $0 \neq \eta - \xi \in \mathrm{int}\mathcal{B}$, $\|3/4\eta - \xi\| \le 1/4\|\eta\|$. Очевидно, имеет место

$$\|\eta - \xi\| \le 1/4\|\eta\| + \|3/4\eta - \xi\| \le 1/4\|\eta\| + 1/4\|\eta\| = 1/2\|\eta\|$$

и, значит, для ξ выполняется (1.3).

Возьмем произвольный вектор $y \in \mathrm{int}B$, $y \neq 0$ и для него построим искомое разложение. Вначале положим $\eta = y$. Тогда $\eta \in \mathrm{int}\mathcal{B}$ и $\eta \neq 0$. Поэтому в силу (1.3) существует такой $y_1 = \xi \in D$, что

$$0 \neq y - y_1 \in \mathrm{int}\mathcal{B}, \quad \|y - y_1\| \le 2^{-1}\|y\|.$$

Далее, возьмем $\eta = y - y_1$. Тогда $\eta \in \mathrm{int}\mathcal{B}$, $\eta \neq 0$. Поэтому в силу (1.3) и предыдущего неравенства существует такой вектор $y_2 = \xi \in D$, что имеет место

$$0 \neq y - y_1 - y_2 \in \mathrm{int}\mathcal{B}, \quad \|y - y_1 - y_2\| \le 2^{-1}\|y - y_1\| \le 2^{-2}\|y\|.$$

И вообще, построив $y_1, \dots, y_{i-1}$, положим $\eta = y - \sum_{l=1}^{i-1} y_l$. Тогда из построения этих векторов вытекает, что $\eta \in \mathrm{int}\mathcal{B}$, $\eta \neq 0$ и неравенство

$$\left\| y - \sum_{l=1}^{i-1} y_l \right\| \le \|y\|2^{-i+1}.$$

Поэтому в силу (1.3) и этого неравенства вытекает существование такого вектора $y_i = \xi \in D$, что имеет место

$$0 \neq y - \sum_{l=1}^{i} y_l \in \mathrm{int}\mathcal{B}, \quad \left\| y - \sum_{l=1}^{i} y_l \right\| \le \frac{1}{2}\left\| y - \sum_{l=1}^{i-1} y_l \right\| \le \frac{1}{2}2^{-i+1}\|y\| = 2^{-i}\|y\|.$$

Процесс построения последовательности $\{y_i\}$ описан.

По построению имеем $\left\| y - \sum_{l=1}^{i} y_l \right\| \to 0$ при $i \to \infty$, т. е. ряд $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ сходится. Оценим нормы y_i. Имеем $\|y_1\| \le \|y - y_1\| + \|y\| \le 2^{-1}3\|y\|$. Для каждого номера i выполнено

$$\|y_i\| = \|y_i + \dots + y_1 - y + y - y_1 - \dots - y_{i-1}\|$$

$$\le \left\| \sum_{l=1}^{i} y_l - y \right\| + \left\| y - \sum_{l=1}^{i-1} y_l \right\| \le 2^{-i}\|y\| + 2^{-(i-1)}\|y\| = 3\|y\|2^{-i}.$$

Значит построенное разложение является искомым. □

Из леммы вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Для любого* $y_0 \in \mathrm{ri}C$ *существуют такие, зависящие от* y_0, *числа* $\delta > 0$ *и* $a > 0$, *что*

$$\forall\, y \in \mathrm{cone}B_\delta(y_0)\bigcap C \quad \exists\, x \in K: \quad Ax = y, \quad \|x\| \le a\|y\|. \tag{1.4}$$

Здесь и ниже $\mathrm{cone}B = \bigcup\limits_{\alpha\ge 0} \alpha B$ *— это коническая оболочка множества* B.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольного $y \in C$ рассмотрим задачу

$$\|x\| \to \inf, \quad Ax = y, \quad x \in K,$$

где y — это параметр. Через $p(y)$ обозначим инфимум в ней. По построению $p(y) < \infty$ для любого $y \in C$. Кроме того, функция p, очевидно, выпукла. Докажем, что p ограничена сверху на некотором непустом, открытом относительно $\mathrm{Lin}C$ подмножестве.

Используя наложенное выше условие, что подпространство $\mathrm{Lin}C$ замкнуто, переходя, если надо, к подпространству $\mathrm{Lin}C$, будем считать, что $Y = \mathrm{Lin}C$. Теперь, используя предположение, что относительная внутренность $\mathrm{ri}C$ непуста, получаем, что и его внутренность $\mathrm{int}C$ непуста, т. к. $0 \in C$. Поэтому существует такой непустой открытый шар O, что $O = O\bigcap \mathrm{Lin}C \subset C$.

Возьмем лежащий в $\mathrm{int}C$ замкнутый шар положительного радиуса $\tilde{B}$. Для натуральных i положим

$$C_i = \{y \in Y : y = Ax, \quad x \in K, \quad \|x\| \le i\|y\|\}.$$

Тогда по построению имеем $\bigcup\limits_i C_i = C$, откуда легко вытекает, что $\bigcup\limits_i (C_i \bigcap \widetilde{B}) = \widetilde{B}$.

Применим теорему Бэра о категориях к полному метрическому пространству $\widetilde{B}$. В силу этой теоремы существуют такие замкнутый шар положительного радиуса $B \subset \widetilde{B}$ и натуральное число N, что $C_N \bigcap B$ всюду плотно в B. Ясно, что $B \subset \mathrm{int}C$. Положим $D = \bigcup\limits_{\alpha\in(0,1]} \alpha(C_N \bigcap B)$. Очевидно, что D всюду плотно в $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{\alpha\in(0,1]} \alpha B$.

Возьмем произвольное $y \in \mathrm{ri}B$, $y \ne 0$. По лемме 1.1 существует разложение (1.2). Поэтому имеем

$$y_i \in D \Rightarrow \exists\, x_i \in K: \quad Ax_i = y_i, \quad \|x_i\| \le N\|y_i\|; \quad \|y_i\| \le 3\|y\|2^{-i} \Rightarrow \|x_i\| \le 3N\|y\|2^{-i} \quad \forall\, i.$$

Значит, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ сходится к некоторому x, причем $x \in K$ в силу замкнутости K.

Применяя почленно к ряду $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ непрерывный оператор A, получаем $Ax = \sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i = y$. Кроме того, $\|x\| \le \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \le 3N\|y\|$. Таким образом,

$$\forall\, y \in \mathrm{ri}B \quad \exists\, x \in K: \quad Ax = y, \quad \|x\| \le 3N\|y\|,$$

и, значит, на шаре $\mathrm{ri}B$ функция p ограничена сверху числом $3N$. Таким образом, p выпукла, конечна во всех точках множества C и ограничена сверху на некотором непустом открытом множестве. Поэтому (см. [2, предложение 2.5]) функция p непрерывна на $\mathrm{ri}C$. Отсюда непосредственно вытекает справедливость неравенства (1.4) для некоторых $a > 0$ и $\delta > 0$. □

Следствие 1.1. (Это обобщение леммы 2.1 из [3]). *Пусть конус C содержит замкнутое подпространство Y_1. Тогда существует $a>0$ такое, что*

$$\forall\, y\in Y_1 \quad \exists\, x\in K: \quad Ax=y, \quad \|x\|\le a\|y\|.$$

Если $C=Y_1$, то это вытекает из теоремы 1.1 при $y_0=0$. Общий случай сводится к указанному переходом от конуса K к конусу $\widetilde{K}=K\bigcap A^{-1}(Y_1)$.

Следствие 1.2. *Пусть $x_0\in K$, $Ax_0=y_0\in \mathrm{ri}C$. Тогда существуют такие, зависящие от x_0, числа $\delta>0$ и $a>0$, что*

$$\forall\, \xi\in B_\delta(x_0)\cap K \quad \forall\, y\in B_\delta(y_0)\cap C \quad \exists\, x\in K: \quad Ax=y, \quad \|x-\xi\|\le a\|y-A\xi\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем числа $\delta>0$ и $a>0$, которые отвечают y_0 в силу теоремы 1.1. Выберем $\varepsilon>0$ так, что имеет место $A(B_\varepsilon(x_0))\subseteq B_\delta(y_0)$. Для произвольных фиксированных $y\in B_\delta(y_0)$, $\xi\in B_\varepsilon(x_0)$ рассмотрим задачу минимизации по x

$$\|x-\xi\|\to\inf, \quad Ax=y, \quad x\in K$$

(ξ, y — параметры). Инфимум в ней обозначим через $p_\xi(y)$.

Каждая из функций p_ξ выпукла, и в силу теоремы 1.1 эти функции p_ξ ограничены равномерно по $\xi\in B_\varepsilon(x_0)$ на некотором относительно открытом множестве $B_\delta(y_0)$. Отсюда, повторяя дословно рассуждения, приведенные в [2, с. 22–23] (см. следствие 2.4 и замечание к нему), получаем, что в некоторой окрестности y_0 все функции p_ξ удовлетворяют условию Липшица с одной и той же константой Липшица a. Из очевидных соотношений

$$p_\xi(A\xi)=0 \implies p_\xi(y)=|p_\xi(y)-p_\xi(A\xi)|\le a\|y-A\xi\|$$

получаем требуемое. При этом мы, выбрав из чисел ε и δ наименьшее, обозначили его символом δ. □

Теорема 1.2. *Пусть пространство Y конечномерно. Тогда для любого замкнутого выпуклого конуса $\widetilde{C}$, для которого $\widetilde{C}\setminus\{0\}\subset \mathrm{ri}C$, существует такое $a>0$, что имеет место*

$$\forall\, y\in \widetilde{C} \quad \exists\, x\in K: \quad Ax=y, \quad \|x\|\le a\|y\|. \tag{1.5}$$

Это утверждение вытекает из теоремы 1.1 и соображений компактности, применительно к единичной сфере конечномерного пространства.

Следующий пример показывает, что в приведенной теореме предположение о конечномерности Y существенно.

П р и м е р 1.2. Суть конструкции такова. Пусть Y — это бесконечномерное гильбертово пространство, а $\widetilde{C}$ и C — это ненулевые замкнутые выпуклые конусы в нем, причем $B_\delta(\widetilde{C}\bigcap S)\subset C$ для некоторого $\delta>0$. Здесь S единичная сфера, а $B_\delta(M)$ — это δ-окрестность множества M. При этом имеет место $\widetilde{C}\setminus\{0\}\subset \mathrm{ri}C$.

Предположим, что существует определенная на C конечная неотрицательная положительно-однородная выпуклая функция p, которая непрерывна на $C\setminus\{0\}$, однако неограничена на $\widetilde{C}\bigcap S$. Доопределив функцию p вне C как $+\infty$, в гильбертовом пространстве $X=Y\times\mathbb{R}^1$ рассмотрим ее надграфик $K=\{x=(y,\alpha):\ y\in C,\ \alpha\ge p(y)\}$. Очевидно, что K — это выпуклый замкнутый конус. Определим линейный непрерывный оператор проектирования $A : X \to Y$ формулой $Ax = y$, где $x = (y, y^0)$, $y \in Y$, $y^0 \in \mathbb{R}^1$. По построению $A(K) = C$.

В то же время для конуса $\widetilde{C}$ условие (1.5) нарушается. Это вытекает из того, что по построению $|x| \geq p(y)$ для любых $y \in C$ и $x \in K$, для которых $Ax = y$, а по предположению функция p неограничена на $\widetilde{C} \bigcap S$. Нам осталось построить искомые конусы C, $\widetilde{C}$ и функцию p. Сделаем это.

Итак, пусть Y — это гильбертово пространство с ортонормированным базисом $e_0, e_1, \ldots$ Конус C определим так

$$C = \{y = \alpha(e_0 + e) : \alpha \geq 0, \quad e \in Y, \quad \langle e, e_0 \rangle = 0, \quad |e| \leq 1\}.$$

Очевидно, конус C является выпуклым и замкнутым. Выберем число $\beta \in (-1, 0)$ так, что $2\beta^2 > 1$. Определим последовательности векторов $g_n = \beta e_0 + e_n$ и конусов $G_n = \{y \in Y : \langle y, g_n \rangle \geq 0\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Используя определение β непосредственной проверкой получаем, что $C \bigcap G_i \bigcap G_j = \{0\}$ $\forall\, i \neq j$. Для $y \in C$ положим $p(y) = \max\limits_{n \geq 0}(n\langle g_n, y \rangle)$, где $g_0 = 0$. Функция p определена корректно и конечна на C, т. к. в силу сказанного выше для любого $y \in C$ неравенство $\langle g_n, y \rangle > 0$ выполняется не более чем для одного натурального n. Ясно, что функция p положительно-однородна, выпукла и непрерывна на C в каждой точке $y \neq 0$.

Выберем число $\gamma < 1$ так, что $\beta + \gamma > 0$ и определим конус $\widetilde{C}$ по формуле

$$\widetilde{C} = \{y = \alpha(e_0 + e) : \alpha \geq 0, \quad e \in Y, \quad \langle e, e_0 \rangle = 0, \quad |e| \leq \gamma\}.$$

Легко видеть, что $B_\delta(\widetilde{C} \bigcap S) \subset C$ для $\delta = \frac{1}{2}(1-\gamma)(1+\gamma^2)^{-1/2}$. В то же время при $y_n = (1+\gamma^2)^{-1/2}(e_0 + \gamma e_n)$ имеем $y_n \in \widetilde{C} \bigcap S$ $p(y_n) = n(1+\gamma^2)^{-1/2}(\beta + \gamma) \to \infty$ при $n \to \infty$. Искомые $C, \widetilde{C}, p$ построены.

Из теоремы 1.1 вытекает следующая теорема о $\Gamma-$ накрывании в точке по кривой относительно конуса K. Итак, пусть x_0 — это заданная точка в X, $y_0 = F(x_0)$ и задано отображение $F : X \to Y$. Это отображение F предполагается дважды непрерывно дифференцируемым по Фреше в некоторой окрестности точки x_0, а его вторая производная предполагается липшицевой в этой окрестности. Пусть также задана непрерывная кривая $\phi : [0, r_0] \to Y$, которая начинается в точке y_0, т. е. $\phi(0) = y_0$. Здесь r_0 — это некоторое положительное число.

Пусть в Y задано семейство подмножеств $\Gamma(r)$, зависящее от скалярного параметра $r \geq 0$, которое удовлетворяет следующим свойствам: это семейство возрастает по включению, т. е. имеет место

$$\Gamma(r_1) \subset \Gamma(r_2) \quad \forall\, r_1 < r_2,$$

и $\Gamma(0) = \{0\}$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Скажем, что отображение F является $\Gamma-$ накрывающим в точке x_0 по кривой ϕ относительно конуса K, если имеет место

$$F(B_r(x_0) \bigcap (x_0 + K)) \supseteq \phi(r) + \Gamma(r) \quad \forall\, r \in [0, r_0].$$

Если $\phi(r) \equiv y_0$, то говорят о $\Gamma-$ накрывании в точке x_0 относительно конуса K. Если $\phi(r) \equiv y_0$ и $\Gamma(r) \equiv B_{br^2}$, то накрывание называется квадратичным.

Далее будем считать, что $A = F'(x_0)$. Тогда $C = A(K) = F'(x_0)(K)$. Относительно выпуклого конуса C будем далее предполагать, что подпространство $Y_1 = \mathrm{Lin}C$ замкнуто, топологически дополняемо и его относительная внутренность $\mathrm{ri}C$ непуста. Эти предположения автоматически выполняются, если пространство Y конечномерно.

Определение 1.2. Пусть $h \in K$. Скажем, что отображение F является 2-регулярным в точке x_0 относительно конуса K по направлению h, если имеет место

$$Y_1 + F''(x_0)[h, \mathrm{Ker}F'(x_0) \bigcap K] = Y.$$

Отметим, что если для заданного отображения F в точке x_0 имеет место $Y_1 = Y$, то всегда можно взять $h = 0$. В общем же случае это неверно.

Теорема 1.3. *Предположим, что отображение F является 2-регулярным в точке x_0 относительно конуса K по направлению $h \in K$, причем $\|h\| < 1$.*

Тогда для любых векторов $l, m \in \mathrm{ri}C$ найдутся такие числа $\delta > 0$ и $b > 0$, что отображение F является Γ-накрывающим в точке x_0 по кривой ϕ относительно конуса K. Здесь

$$\phi(r) = y_0 + rF'(x_0)h + r^2\left(\frac{1}{2}F''(x_0)[h, h] + m\right),$$

а семейство Γ определяется по формуле

$$\Gamma(r) = \left(B_{br} \bigcap \mathrm{cone}B_\delta(l) \bigcap Y_1\right) + B_{br^2}.$$

Здесь B_r — это шар в Y с центром в нуле и радиуса r.

Мы не приводим доказательство теоремы 1.3, а лишь обсудим ее. Обозначим через π_1 и π_2 непрерывные операторы проектирования Y на Y_1 и на некоторое замкнутое подпространство Y_2, дополняющее Y_1, соответственно. Если при этом конус $C = F'(x_0)(K)$ является подпространством, то следует брать

$$m = -\frac{1}{2}\pi_1 F''(x_0)[h, h].$$

Тогда, очевидно, кривая ϕ примет вид

$$\phi(r) = y_0 + rF'(x_0)h + \frac{1}{2}r^2\pi_2 F''(x_0)[h, h].$$

Частный, но наиболее употребительный случай теоремы 1.3 — это когда вектор $h \in K$ удовлетворяет условиям

$$F'(x_0)h = 0, \quad (-F''(x_0)[h, h]) \in \mathrm{ri}C.$$

Тогда берем $m = -\frac{1}{2}F''(x_0)[h, h]$, откуда $\phi(r) \equiv y_0$, и мы получаем $\Gamma-$накрывание в точке x_0 относительно конуса K.

Пусть теперь $K = X$. Если при этом условие Люстерника $F'(x_0)(X) = Y$, которое хорошо известно (см., например [4,5]), нарушается, то точка x_0 называется анормальной. В этом случае в [6] доказано следующее утверждение.

Пусть отображение F дважды непрерывно дифференцируемо по Фреше в окрестности точки x_0, а образ первой производной $\mathrm{Im}F'(x_0)$ является замкнутым топологически дополняемым подпространством и существует такой вектор $h \in X$, что

$$F'(x_0)h = 0, \quad F''(x_0)[h,h] \in \mathrm{Im}F'(x_0), \quad \mathrm{Im}F'(x_0) + F''(x_0)[h, \mathrm{Ker}F'(x_0)] = Y.$$

Тогда существуют такие $b > 0$ и $r_0 > 0$, что отображение F является $\Gamma-$ накрывающим в точке x_0 относительно конуса $K = X$. Здесь семейство Γ_r определяется по формуле

$$\Gamma(r) = \left(B_{br} \bigcap \mathrm{Im}F'(x_0)\right) + B_{br^2}.$$

References

[1] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 5-е изд., Наука, М., 2007; англ. пер.:A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, **I, II**, Dover Publications, Mineola, New York, 1957, 1961.

[2] И. Экланд, Р. Темам, *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, Мир, М., 1979, 399 с.; англ. пер.:I. Ekeland, R. Temam, *Convex Analysis and Variational Problems*, SIAM, Philadelphia, 1976, 402 pp.

[3] А. В. Дмитрук, А. А. Милютин, Н. П. Осмоловский, “Теорема Люстерника и теория экстремума”, *УМН*, **35**:6(216) (1980), 11–46; англ. пер.:A. V. Dmitruk, A. A. Milyutin, N. P. Osmolovskii, “Lyusternik's theorem and the theory of extrema”, *Russian Math. Surveys*, **35**:6 (1980), 11–51.

[4] Л. А. Люстерник, “Об условных экстремумах функционалов”, *Матем. сборник*, **41**:3 (1934), 390–401. [L. Lusternik, “Sur les extrémés relatifs des fonctionnelles”, *Mat. Sb.*, **41**:3 (1934), 390–401 (In Russian)].

[5] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974. [A. D. Ioffe, V. M. Tikhomirov, *Theory of Extremal Problems*, Science Publ., Moscow, 1974 (In Russian)].

[6] Е. Р. Аваков, “Теоремы об оценках в окрестности особой точки отображения”, *Матем. заметки*, **47**:5 (1990), 3–13; англ. пер.:E. R. Avakov, “Theorems on estimates in the neighborhood of a singular point of a mapping”, *Math. Notes*, **47**:5 (1990), 425–432.

Информация об авторах

Арутюнов Арам Владимирович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории 45, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация.
E-mail: arutyunov@cs.msu.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7326-7492

Жуковский Сергей Евгеньевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории 45, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация.
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2686-4654

Information about the authors

Aram V. Arutyunov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher of Laboratory 45, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation. E-mail: arutyunov@cs.msu.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7326-7492

Sergey E. Zhukovskiy, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher of Laboratory 45, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation.
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2686-4654

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

Для контактов:
Жуковский Сергей Евгеньевич
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Corresponding author:
Sergey E. Zhukovskiy
E-mail: s-e-zhuk@yadex.ru

Поступила в редакцию 18.08.2023 г.
Поступила после рецензирования 07.11.2023 г.
Принята к публикации 23.11.2023 г.

Received 18.08.2023
Reviewed 07.11.2023
Accepted for press 23.11.2023